轴测投影的基本公式及其应用

唐人卫

(东南大学交通学院,南京 210096)

摘要: 轴测投影是画法几何学的重要组成部分,本文用解析的方法来研究一般形式的轴测投影问题.根据轴测投影系统中空间坐标系、投射方向、投影面三者之间的几何关系,推导并证明了轴测投影的基本公式.基本公式作为轴测投影基本定理(波尔克-许华尔兹定理)的数学表达式,更确切地反映了各轴测参数之间的定量关系,它在轴测投影的理论和应用方面都有重要的意义.本文在此基础上,整理出5组各类参数的计算公式,既适用于正轴测投影也适用于斜轴测投影.

关键词: 画法几何; 轴测投影; 波尔克-许华尔兹定理; 轴测基本公式

中图分类号: O185.1　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1001-0505(2001)03-0124-04

在画法几何学中有一个著名的定理,它是这样表述的:平面上从一个点引出的任意3条线段,总可以作为空间3条互相垂直的相等线段的平行投影[1].这个定理是由几何学家波尔克(Pohlke)在1853年首先提出,并由另一位几何学家许华尔兹(Schwarz)在19世纪60年代给出了简要的证明.这个定理不仅奠定了轴测投影的理论基础,而且在应用方面也有着十分重要的意义,因此被称为轴测投影的基本定理.

基本定理告诉我们:投影平面上轴测轴的各种位置(即轴间角)和轴测单位的各种长度(即轴向伸缩系数)是与空间坐标轴的各种位置和投射方向相对应的.当任意选定了轴向伸缩系数的比值和轴间角以后,总能求出空间坐标轴的位置和相应的投射方向,基本定理定性地描述了轴测投影中各参数之间的互相关系.那么各轴测参数之间的定量关系怎样呢? 本文在此推导并证明轴测投影的基本公式.此公式为

$$(pq\sin\angle x'o'y')^2 + (qr\sin\angle y'o'z')^2 + (rp\sin\angle z'o'x')^2 = p^2 + q^2 + r^2 - 1 \tag{1}$$

式中,p、q、r 为轴向伸缩系数; $\angle x'o'y'$, $\angle y'o'z'$, $\angle z'o'x'$ 为轴间角.

1 预备公式的推导

为了推证基本公式,我们首先证明2个预备公式.

1.1 预备公式1[2]

$$p^2 + q^2 + r^2 = 2 + \cot^2\varphi \tag{2}$$

证 空间直角坐标系 $oxyz$ 在投影平面 π 上的平行投影为 $o'x'y'z'$,即轴测坐标系; oo' 为投射方向,它与 π 的夹角为 φ, oo' 的方向角为 α,β,γ; oo_1 垂直于 π, oo_1 的方向角为 α_1、β_1、γ_1,如图1所示.

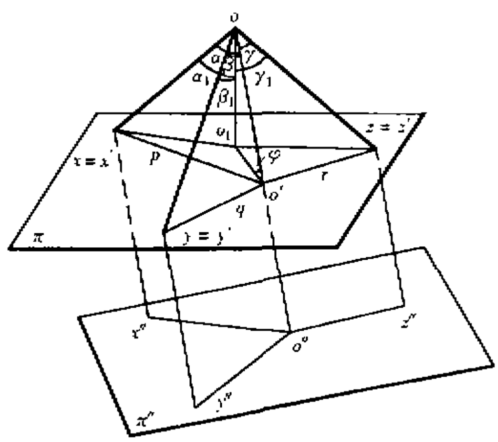

图1 轴测投影系统的空间几何关系

由 $\triangle oo'x'$ 有

$$o'x'^2 = oo'^2 + ox'^2 - 2oo' \cdot ox' \cdot \cos\alpha$$

由 $\triangle oo_1o'$ 和 $\triangle oo_1x'$ 有

$$oo' = ox' \frac{\cos\alpha_1}{\sin\varphi}$$

代入上式,得

收稿日期: 2001-01-15. **作者简介**: 唐人卫, 男, 1950年生, 副研究员

$$o'x'^2 = ox'^2 + ox'^2 \frac{\cos^2\alpha_1}{\sin^2\varphi} - 2ox'^2 \frac{\cos\alpha\cos\alpha_1}{\sin\varphi}$$

两边除以 ox'^2,并且 $p = \frac{o'x'}{ox'}$ 得

$$p^2 = 1 + \frac{\cos^2\alpha_1}{\sin^2\varphi} - 2\cos\alpha\frac{\cos\alpha_1}{\sin\varphi} \tag{3}$$

同理可得

$$q^2 = 1 + \frac{\cos^2\beta_1}{\sin^2\varphi} - 2\cos\beta\frac{\cos\beta_1}{\sin\varphi} \tag{4}$$

$$\gamma^2 = 1 + \frac{\cos^2\gamma_1}{\sin^2\varphi} - 2\cos\gamma\frac{\cos\gamma_1}{\sin\varphi} \tag{5}$$

根据直角坐标系中方向角公式

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1 \tag{6}$$

再根据方向角的余弦公式

$$\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1 = \sin\varphi \tag{7}$$

将式(3)、(4)、(5)相加,并把式(6)和(7)代入,化简为

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1 + \frac{1}{\sin^2\varphi}$$

于是得到式(2).证毕.

1.2　预备公式 2

$$(pq\sin\angle x'o'y')^2 + (qr\sin\angle y'o'z')^2 + (rp\sin\angle z'o'x')^2 = \csc^2\varphi \tag{8}$$

证　为了找出各参数之间的几何关系,另设一辅助平面 π'',让 π'' 垂直于投射方向 oo'.如图 1 所示,不管投射方向怎样选择,$\triangle x'o'y'$ 和 $\triangle xoy$ 在平面 π'' 上的正投影面积总是相等的,于是有

$$S_{\triangle x'o'y'}\sin\varphi = S_{\triangle xoy}\cos\gamma$$

即 $\frac{1}{2}o'x' \cdot o'y' \cdot \sin\angle x'o'y'\sin\varphi = \frac{1}{2}ox \cdot oy \cdot \cos\gamma$.因为 $p = \frac{o'x'}{ox}$,$q = \frac{o'y'}{oy}$,所以

$$pq\sin\angle x'o'y'\sin\varphi = \cos\gamma \tag{9}$$

同理可得

$$qr\sin\angle y'o'z'\sin\varphi = \cos\alpha \tag{10}$$

$$rp\sin\angle z'o'x'\sin\varphi = \cos\beta \tag{11}$$

因为

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos\gamma^2 = 1 \tag{12}$$

所以将式(9)、(10)、(11)相加得

$$(pq\sin\angle x'o'y'\sin\varphi)^2 + (qr\sin\angle y'o'z'\sin\varphi)^2 + (rp\sin\angle z'o'x'\sin\varphi)^2 = 1$$

上式两边同除以 $\sin^2\varphi$,即得式(8).证毕.

2　基本公式的证明

2.1　基本公式的分析与证明

在证明了这 2 个预备公式后,先来分析确定轴测系统位置的条件.这里所说的轴测系统的位置,是指投射方向、空间坐标系,投影面三者之间的互相位置,下同.本文为讨论明确起见,不妨把 φ,α,β,γ 和 α_1,β_1,γ_1 称为空间参数,把 p,q,r 和 $\angle x'o'y'$,$\angle y'o'z'$,$\angle z'o'x'$ 称为轴测参数.投射方向与投影面的互相位置由 φ 确定;投射方向与坐标系的互相位置由 α,β,γ 确定;坐标系与投影面的互相位置由 α_1,β_1,γ_1 确定.所以当 7 个空间参数全部确定后,轴测系统的位置也就完全确定了.但各空间参数还必须满足式(7)的关系,此式是个七元方程,由于在直角坐标系中总有式(6)和式(12)的关系,3 个方向角只有 2 个独立,于是式(7)只包含 5 个独立参数,有 4 个自由度,只要任给出其中 4 个独立参数,就能求出其余空间参数,从而也就能确定轴测系统的位置.

根据预备公式(2)可知,3个轴向伸缩系数的平方和是φ的函数,预备公式(8)反映了φ与伸缩系数和轴间角的关系,联立式(2)和式(8),从中消去φ,于是就推导出式(1),即基本公式.基本公式反映了轴测投影中各轴测参数之间的定量关系.下面再证明,基本公式是确定轴测系统位置的充分与必要条件.

证 关于必要性,基本公式的2个预备公式就是从空间情况导出的,上面的推导过程已经作了证明,故无需赘述,下面证明充分性.

基本公式是六元方程,由于在平面上3个轴间角的和总满足

$$\angle x'o'y' + \angle y'o'z' + \angle z'o'x' = 360° \tag{13}$$

所以3个轴间角只有2个独立,那么基本公式本身只包含有5个独立参数,只要任给出其中4个独立的轴测参数,就可以确定其余的参数.这说明了一般形式的轴测投影有4个自由度,此结论与前面空间参数的讨论结果相一致.

这里还要特别指出,基本公式中的p,q,r都是"准确值",如果已知条件中给出的p,q,r是经过放大或缩小后的"简化值",则实际知道的只是它们的比值$p:q:r$,只能算2个独立参数.另外再给出2个轴间角,代入基本公式,即可算出p,q,r的"准确值".于是由式(2)可计算出φ角,再由式(10)和式(11)计算出α和β,最后由式(3)计算出α_1.这样,在确定了$\varphi,\alpha,\beta,\alpha_1$这4个独立的空间参数后,其余的空间参数就可求出,于是轴测系统的位置就完全确定了.证毕.

2.2 基本公式的结论

根据基本公式,可以得到如下2个结论:

1)在轴测投影中,3个轴向伸缩系数和3个轴间角是不能任意选择的,必须满足基本公式才能成立.否则任意确定的一组伸缩系数和轴间角,一般都不能构成轴测系统.

2)由于轴测投影有4个自由度,画轴测图时,可以任意选取一组伸缩系数的比值(即$p:q:r$)和轴间角,则一定能构成轴测系统,而投射方向、空间坐标系、投影平面三者之间的位置总是确定的.

以上结论充分体现了轴测投影基本定理的深刻内容,所以式(1)是轴测投影基本定理的数学表达式,可以称它为轴测投影基本公式.

再来看轴测投影中的一个特例.当投射方向与投影面垂直,即投射角$\varphi=90°$时,就是正轴测,于是式(2)可化简为

$$p^2+q^2+r^2=2$$

将上式代入式(1),就得到

$$(pq\sin\angle x'o'y')^2+(qr\sin\angle y'o'z')^2+(rp\sin\angle z'o'x')^2=1$$

实际上这就是正轴测投影基本定理——高斯定理的数学表达式,高斯公式$L^2+M^2+N^2=0$是其复数表达式(详见文献[2]),而上式则是它的参数表达式,它们本质上是相同的,可见高斯公式是轴测投影基本公式的特例.

我们绘制轴测图时,既要求作图简便又要求立体感强,首先就要根据所绘立体的形状选择合适的轴测类型.过去往往偏重于选择正轴测,其实正轴测的限定条件较多(只有2个自由度),除了正等测外,其他类型都不能使轴向伸缩系数的比值和轴间角同时取最优值.而由轴测投影基本公式得到的结论,一般形式的轴测投影(包括正轴测和斜轴测)的限定条件较少(有4个自由度),可以任选轴向伸缩系数的比值和轴间角,这样就给轴测投影的应用带来极大的便利.

3 参数计算公式

在前面推导基本公式的过程中,其实已经得到了一系列的参数计算公式,为了实际应用的方便,这里将它们分类归纳整理成如下5组计算公式.当然在利用它们计算时,既要注意已知条件的独立性,也应注意计算结果的合理性.

3.1 A组公式——轴测参数间的计算公式

A组公式由式(1)和式(13)组成,反映了6个轴测参数(p,q,r和$\angle x'o'y'$,$\angle y'o'z'$,$\angle z'o'x'$)之间的换算关系.

$$(pq\sin\angle x'o'y')^2 + (qr\sin\angle y'o'z')^2 + (rp\sin\angle z'o'x')^2 = p^2 + q^2 + r^2 - 1 \tag{1}$$

$$\angle x'o'y' + \angle y'o'z' + \angle z'o'x' = 360° \tag{13}$$

3.2　B 组公式 —— 空间参数间的计算公式

B 组公式由式(12)、(6) 和(7) 组成，反映了 7 个空间参数(φ，α，β，γ 和 α_1，β_1，γ_1)之间的换算关系．由于篇幅所限，各式不再一一列出，可根据编号从上文查找．下同．

3.3　C 组公式 —— 已知轴测参数求空间参数的计算公式

只要任给出 4 个独立的轴测参数，总可以由 A 组公式计算出其余轴测参数，所以不妨认为全部轴测参数都是已知的．C 组公式可由式(2)、(9)、(10)、(11) 和式(3)、(4)、(5) 组成．

3.4　D 组公式 —— 已知空间参数求轴测参数的计算公式

只要任给出 4 个独立的空间参数，总可以由 B 组公式计算出其余空间参数，所以不妨认为全部空间参数都是已知的．D 组公式可由式(3)、(4)、(5) 和式(9)、(10)、(11) 组成．

3.5　E 组公式——轴测投影的综合计算公式

在上面 A，B，C，D 四组公式中，共有 12 个计算式(重复的不计)，其中并非都是独立方程，但为了便于实际选用，都纳入 E 组内．E 组公式由式(1)、(13)、(12)、(6)、(7)、(2)、(9)、(10)、(11)、(3)、(4)、(5)组成．只要任意给出 4 个独立参数，则可利用 E 组公式求出全部参数，所以称为轴测投影的综合计算公式．

4　结束语

用解析的方法来研究轴测投影，以往主要侧重在正轴测方面，而对一般形式的轴测投影研究得很不够，因而至今没有得到令人满意的轴测投影基本定理的数学表达式．本文旨在这方面更进一步，根据轴测投影系统中各参数的几何关系，推导并证明了轴测基本公式，在此基础上整理出 5 组实用的参数计算公式．

在科学研究中，数学方法是一种不可缺少的认识手段和辅助工具．按马克思的看法，一种科学只有成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步．轴测投影基本公式是基本定理的继续深化和发展，两者结合起来，共同奠定了轴测投影的完整理论基础，而且在应用方面将发挥更加重要的作用．

参　考　文　献

1　包太兹，米列斯库．轴测投影理论与应用．李世铨译．北京：机械工业出版社，1988．118～130

2　格拉祖诺夫，切特维鲁新．轴测投影学．第 2 版．徐良佐等译．北京：人民教育出版社，1981．48～60

3　丘维声．解析几何．北京：北京大学出版社，1988．25～31

Foundation Formula of Axonometric Projection and Its Application

Tang Renwei

(Transportation College, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract: Axonometric projection is one of the important parts in descriptive geometry. This paper uses an analytical method to solve problems in axonometric projection. The foundation formula of axonometric projection is deduced and proved by using geometric relations among space coordinates, projective directions and projection planes in axonometric projection system. The foundation formula, which is Pohlke-Schwarz theorem demonstrated by mathematics represents more exactly the qualitative relations of all parameters in axonometric projection. It plays a very important part in axonometric projection's theory and its application. There are five sets of calculating formulae in this paper, which are suitable for both orthogonal projection and oblique projection.

Key words: descriptive geometry; axonometric projection; Pohlke-Schwarz theorem; axonometric foundation formula