

# 冲击载荷作用下阻尼介质中 刚塑性圆板的动力响应\*

李庆明

(太原工业大学)

关键词 圆板, 冲击载荷, 阻尼介质, 塑性动力响应

## 1. 引言

阻尼介质对结构塑性动力响应的影响属于流体与固体的耦合运动. 在分析中往往将流体对固体的作用采用一个相当的阻力来代替. 当流体为水时, 这一阻力可表示为  $f = \alpha \dot{W}$ . 其中,  $f$  为圆板单位面积上流体阻力;  $\alpha$  为阻尼系数, 它与流体介质密度及其波速有关;  $\dot{W}$  为圆板横向速度. Kumar 在 1982 年曾采用此方法得到了矩形载荷作用下简支圆板在阻尼介质中的动力响应完全解<sup>[1]</sup>. 但同样的结果早在 1963 年就由苏联学者 A. A. Амандосов 得到<sup>[2]</sup>. 文献[3]进一步讨论了阻尼存在时横向剪力的作用.

Krajcinovic 曾讨论了理想不可压流体与简支圆板的耦合运动<sup>[4,5]</sup>. 虽然他给出了耦合运动的方程, 但只得到了锥形模态的完全解, 这种模态仅对应于中载情形<sup>[1]</sup>.

本文将载荷形式推广到一般的冲击载荷, 得到该问题的完全解. 基本方程、屈服条件、连续条件及边界条件均与文献[1]中相同, 在分析中采用以下无量纲形式

$$\begin{aligned} m_r &= \frac{M_r}{M_0}; & m_\theta &= \frac{M_\theta}{M_0}; & \xi &= \frac{r}{R}; & \tau &= \frac{t}{(I^*/P_0)} \\ \dot{\bar{W}} &= \dot{W} / \left(-\frac{I^*}{\mu}\right); & \ddot{\bar{W}} &= \ddot{W} / \left(-\frac{P_0}{\mu}\right); & \bar{W} &= W / \left(-\frac{I^{*2}}{\mu P_0}\right); \\ P(\tau) &= \frac{P(t)}{P_0}; & \beta &= \alpha I^* / \mu P_0 \end{aligned}$$

式中,  $R$  为圆板半径,  $I^*$  为载荷冲量,  $P(t)$  为冲击载荷 ( $\dot{P}(t) \leq 0$ ),  $P_0 = 6M_0 / R^2$  为圆板静力极限均布载荷,  $\mu$  为圆板单位面积质量,  $W$  为圆板位移,  $M_r$ 、 $M_\theta$  分别为径向与环向弯矩,  $M_0$  为静力极限弯矩,  $\alpha$  为阻尼系数.

同时满足动力学方程、屈服条件、边界条件、连续条件及正交流动法则的解称为完全解. 这样的解是唯一的.

## 2. 冲击载荷作用下问题的解

根据载荷初值  $P$  (不仿设  $P = \bar{P}(0)$ ) 的不同, 运动可以分为以下两种类型

\* 本文于1988年10月4日收到.

I 中载荷( $1 < P < 2$ )

设速度为线性分布(图 1a)

$$\dot{\bar{W}} = \dot{\bar{W}}(1 - \xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (1)$$

假设  $m_r|_{r=0} = -1$ , 则可得以下形式的解

$$m_r = -1 + \bar{P}\xi^2 - (\bar{P} - 1)(2\xi^2 - \xi^3) \quad (2)$$

及

$$\begin{cases} \ddot{\bar{W}} + \beta\dot{\bar{W}} - 2(\bar{P} - 1) = 0 \\ \dot{\bar{W}}|_{\tau=0} = 0 \\ \bar{W}|_{\tau=0} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

对于给定载荷形式  $\bar{P}$ , 很容易得到方程 (3) 的解, 由此代入 (1) 式可得圆板的速度场与位移场.

可以证明: 当  $1 \leq P \leq 2$  时, 由 (2) 给出的  $m_r$  不违背屈服条件. 此时,  $m_r$  随  $\xi$  单调增加. 所得到的解为完全解.

由  $\dot{\bar{W}} = 0$  可求得最终响应时间  $\tau_f$ .

II 高载荷( $P > 2$ )

此时运动分为两个阶段.

(a)  $0 \leq \tau \leq \tau_1$ 

设速度场如下(图 1b)

$$\dot{\bar{W}} = \begin{cases} \dot{\bar{W}} & 0 \leq \xi \leq x \\ \frac{1-\xi}{1-x} \dot{\bar{W}} & x < \xi \leq 1 \end{cases} \quad (4)$$

式中,  $x$  为间断面位置.

假定在  $0 \leq \xi \leq x$  中,  $m_r = -1$ ; 在  $x < \xi \leq 1$  中,  $-1 < m_r \leq 0$ . 所得解如下.

$$m_r = -1 + \frac{\bar{P}}{\xi} [\xi^3 + 3x^2\xi + 2x^3] - \frac{1}{2\xi(1-x)^2} [\bar{P}(x-1) - \dot{x}\dot{\bar{W}}] \cdot [\xi^4 - x^4 - 4x^3(\xi-x) - 2(\xi^3 - x^3) + 6x^2(\xi-x)] \quad (5)$$

式中,  $\dot{\bar{W}}$  由下列微分方程决定

$$\begin{cases} \ddot{\bar{W}} + \beta\dot{\bar{W}} = P \\ \dot{\bar{W}}|_{\tau=0} = 0 \\ \bar{W}|_{\tau=0} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

令  $m_r|_{\xi=1} = 0$ , 则有以下式确定  $x$

$$2 = \bar{P}(1-x-x^2+x^3) + \dot{x}\dot{\bar{W}}(3x^2-2x-1) \quad (7)$$

将(6a)代入(7), 考虑到(6b)并积分(7)式得

$$x^3 - x^2 - x + 1 = \frac{2}{\beta\dot{\bar{W}}} (1 - e^{-\beta t}) \quad (8)$$

式中,  $\dot{\bar{W}}$  由(6)决定.

令  $x = 0$  可得  $\tau = \tau_1$ . 可以证明, 以上的解为完全解.

(b)  $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_f$

此时的解由 I 中的方程给出, 但方程 (3) 中的初条件 (3b,c) 应采用 II-(a) 中  $\tau = \tau_1$  时的相应值.  $\tau_f$  由  $\dot{W} = 0$  给出.

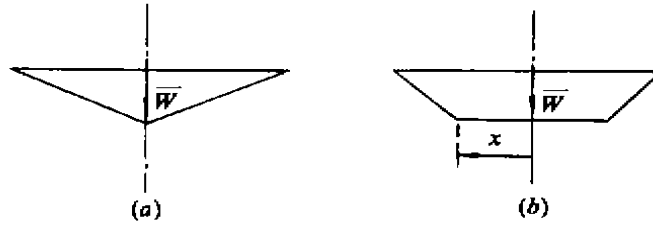


图1 两种流动机构

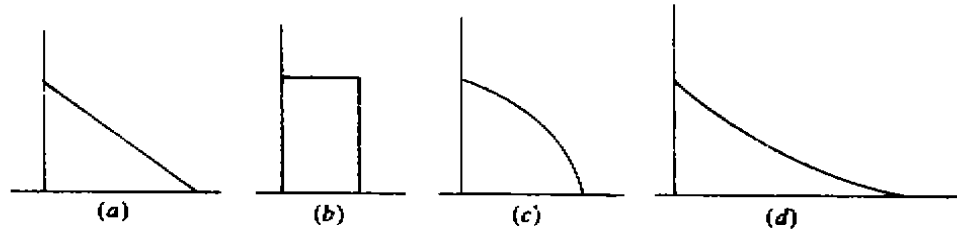


图2 四种载荷形式 (a)线性冲击; (b)矩形载荷; (c)二次曲线; (d)指数冲击

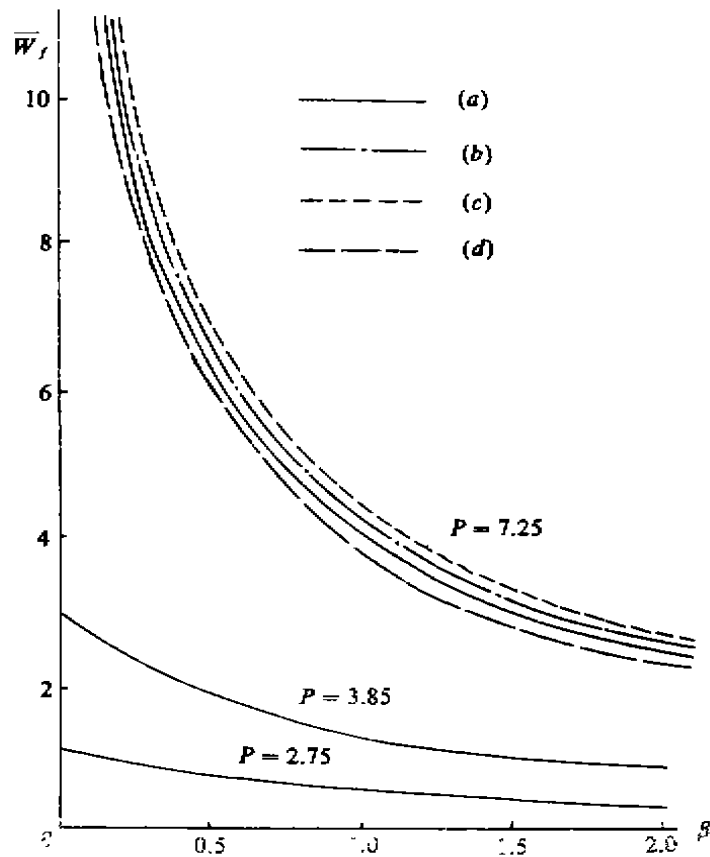


图3 不同载荷作用下系统中心点最终位移随阻尼的变化

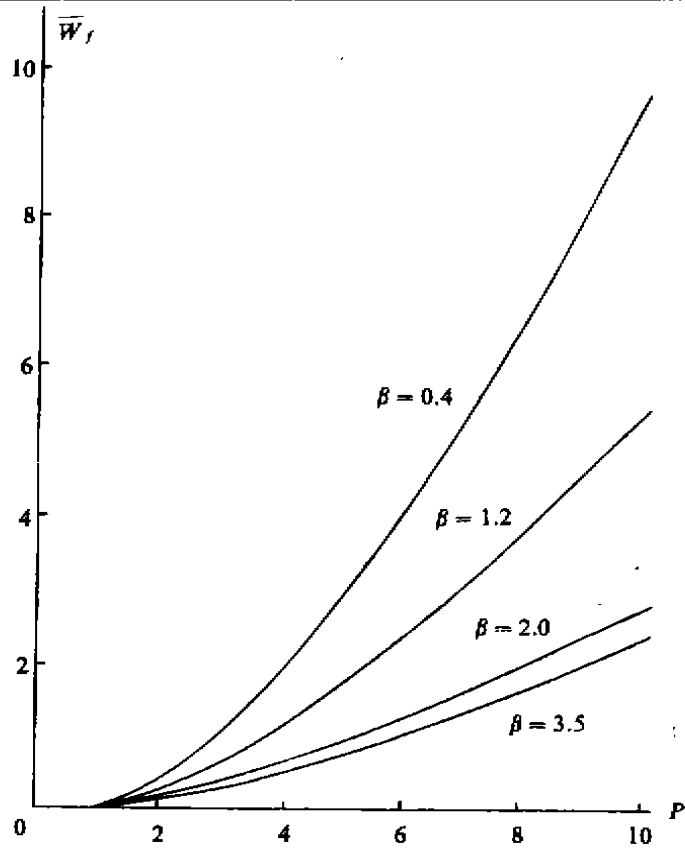


图4 载荷(a)情形下的 $\bar{W}_r - P$ 曲线

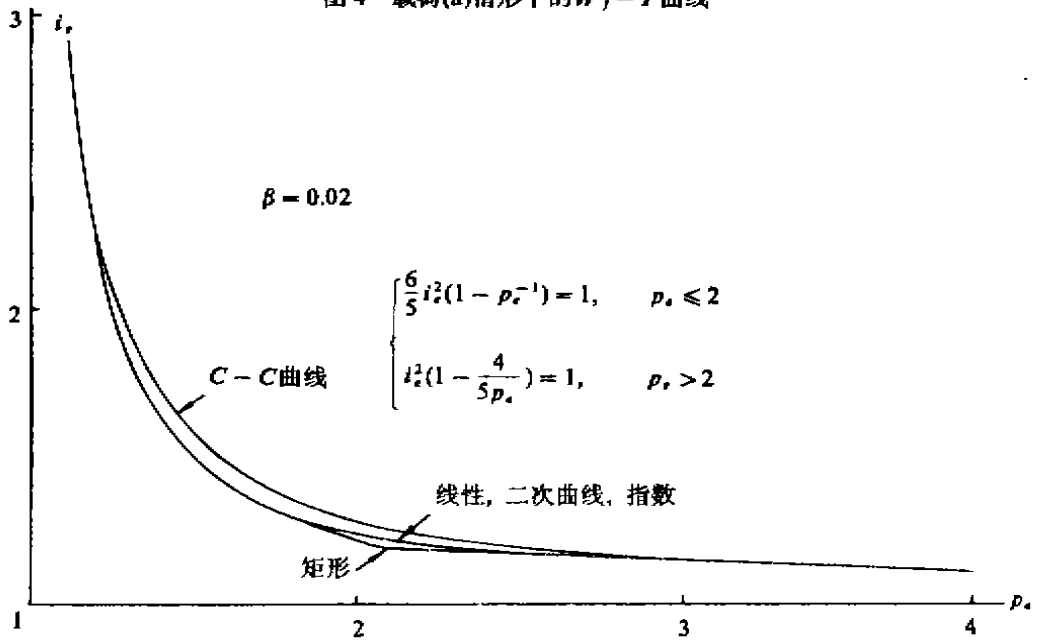


图5 阻尼存在时的临界载荷曲线与C-C曲线(见[7])比较

### 3. 讨论

采用线性阻力来代替求解流体-固体的耦合方程使得问题的求解大大简化. 由本文给出的解 I 与文献[5]中给出的中载荷情形下的解完全相同. 这从理论上保证了这一近似的可行性. 当  $\beta=0$  时, 由本文的结果可得到文献[6]的结果.

图 3 为不同载荷情形下(见图 2), 圆板中点最终位移随阻尼系数的变化曲线. 中点最终位移随阻尼的增大而下降. 但是当阻尼较小时, 中点位移随阻尼的变化较大; 当阻尼较大时, 中点位移随阻尼的变化很慢. 随着阻尼的增大, 中点位移趋于零.

当载荷形式一定时, 可以采用两个参数描述其特征. 本文采用载荷初值  $P$  及其冲量  $I$  进行描述(这里设  $I=P/2$ ). 这时, 载荷初值对不同阻尼下圆板中点位移的影响由图 3 与图 4 给出. 随着  $P$  的增大,  $\beta$  的作用也增加. 图 3 还表明当载荷初值  $P$  一定时, 载荷形式的影响并不是很大.

文献[7]曾对无阻尼结构塑性动力响应中载荷参数的表征进行了讨论, 并给出了统一的临界载荷曲线(简称 C-C 曲线). 根据本文的理论结果, 图 5 给出了  $\beta=0.02$  时四种载荷情形下的临界载荷曲线与 C-C 曲线的比较. 对  $\beta=0.02$  和  $\beta=0.4$ , 在载荷(a)情形下的临界载荷曲线最大误差为 6%左右. 因此, 文献[7]给出的 C-C 曲线对阻尼介质中冲击载荷作用下的圆板仍然适用, 阻尼的影响可以不考虑.

本项目由山西省自然科学基金资助. 卢保国同志协助完成了部分算例; 杨桂通教授给予关心. 在此一并表示谢意.

### 参 考 文 献

- [1] Kumar A., and Hegde M., Dynamic Response of Rigid-plastic Circular Plates in a Damping Medium, ASME J. of Appl. Mech., 49, (1982), 240-241.
- [2] 杨桂通、熊祝华, 塑性动力学, 清华大学出版社, (1984).
- [3] Kumar A., Dynamic Plastic Response of Circular Plates in a Damping Medium, Int. J. of Impact Engng., 6,4(1987), 285-290.
- [4] Krajcinovic D., Dynamic Response of Circular Rigid-Plastic Plates Resting on Fluid, ASME J. of Appl. Mech., 43, (1976), 102-106.
- [5] Krajcinovic D., Response of a Rigid-Plastic Circular Plate in Contact with Newtonian Fluid, ASME J. of Appl. Mech., 45, (1978), 199-202.
- [6] Perzyna P.P., Dynamic Load Carrying Capacity of a Circular Plate, Arch. Mech. Stosow, 10, (1958), 635-647.
- [7] Zhu G., Estimation of the Plastic Structural Response Under Impact, Int. J. of Impact Engng., 4, (1986), 271-282.

**DYNAMIC PLASTIC RESPONSE OF  
RIGID-PLASTIC CIRCULAR PLATES  
IN A DAMPING MEDIUM UNDER DESCEND LOAD**

Li Qingming

*(Taiyuan University of Technology)*

**Key words**

circular plate, descend load, damping medium, dynamic plastic response