第10卷 第1期 石家庄铁道学院学报 Vol. 10 No. 1
1997年3月 JOURNAL OF SHIJIAZHUANG RAILWAY INSTITUTE Mar. 1997

岩石脆性断裂机理的统计分析

陈祥军 高占凤

（交通工程系） （电子工程系）

【摘要】从岩石断裂面应力正态分布假设出发，从统计学角度推导出了岩石脆性断裂的强度条件，并举例说明这一理论在实际中的应用。

【关键词】岩石；脆性断裂；强度理论；统计分析

1 前言

岩石强度理论大体可分为剪切破坏和脆性断裂两大类，统计强度理论是脆性断裂理论的一种。本文简要阐述了统计强度理论，并对这一理论的应用进行了验证。

宏观物体都是由其微观部分组成的，物体的宏观现象是微观现象的综合表现。岩石的破坏也是这样，整体岩石的破坏，可以看成是许多微观破坏的综合表现。这种综合表现最好用统计方法来研究，这就是统计强度理论的基本思想。

2 理论推导

以下推导过程中，遵循构造地质学和岩体力学中的一般规定，以压应力为正，拉应力为负。

2.1应力正态分布的假设

假定岩石在拉应力 δ 的作用下沿 α 面断裂，可以将岩石看成是由许多垂直于 α 面的微小柱体组成的，各柱体与 α 面的截面为许多微小的面 V_i，各 V_i 上的拉应力为 S_i。S_i 的分布应该是一种以 δ 为中心，远离 δ 出现机会逐渐减少的概率分布，可以假设其为正态分布，则其密度函数为

$$P(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(s-\delta)^2}{2\sigma^2}} \tag{1}$$

其中，δ 为数学期望，其表达式为

收稿日期 1996—01—10

$$\delta=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}S_i \tag{2}$$

σ^2为方差，反映各S_i偏离δ的情况，其表达式为：

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(S_i-\delta)^2 \tag{3}$$

(3)式表示方差σ^2是各V_i上应力起伏的平方的均值。应力的平方与弹性势能密度u成正比，那么σ^2也应是一个与u成正比的量。因此，可以认为$\sigma^2=ku$，那么，(1)式变为

$$P(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sqrt{ku}}\cdot e^{-\frac{(s-\delta)^2}{2ku}} \tag{4}$$

为了便于分析，可以对(4)式进行坐标变换，使其成为标准正态分布。设$t=\frac{s-\delta}{\sqrt{ku}}$，那么，在积分区间$(-\infty,+\infty)$上，密度函数相应变为

$$P(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{5}$$

2.2断裂条件推导

设微小面积V_i的拉断应力极限是S_n，则S_i小于S_n的V_i就会遭到破坏。那么，V_i被破坏的概率为

$$P=P(S\leqslant S_n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sqrt{ku}}\int_{-\infty}^{S_n}e^{-\frac{(S-\delta)^2}{2ku}}dS=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t_n}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \tag{6}$$

其中，

$$t_n=\frac{S_n-\delta}{\sqrt{ku}} \tag{7}$$

当拉应力数值增大，即δ减小时，V_i被破坏的概率增大，这也可以理解为破坏的V_i数目增多。当P增大到一定程度P_k时，V_i被破坏的数目足够多，岩块就破裂了。而从式(6)看，P与t_n是一一对应的，设$t_n=t_{nk}$时，$P=P_k$，那么，$P=P_k$的断裂条件与$t_n=t_{nk}$意义相同。因此，岩石的断裂条件可表示为

$$t_n=\frac{s_n-\delta}{\sqrt{ku}}=t_{nk} \tag{8}$$

即：

$$s_n-\delta=\sqrt{ku}t_{nk}=\sqrt{k}\,t_{nk}\ \sqrt{u} \tag{9}$$

式中，S_n与$\sqrt{k}\,t_{nk}$是岩石的性质常量，u为弹性势能密度，由下式给出

$$u=\frac{1}{2E}[\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2-2\upsilon(\delta_1\delta_2+\delta_2\delta_3+\delta_3\delta_1)] \tag{10}$$

E为弹性模量，υ为泊松比，δ_1、δ_2、δ_3为三个方向应力。

根据断裂条件(9)式，如果测出岩石的S_n、$\sqrt{k}\,t_{nk}$、E、υ，就可以对任意受力状态进行稳定性判断。E、υ可以通过一般测试测出(事实上，从下面的推导中可以看出，E的测定是不必要的)。S、$\sqrt{k}\,t_{nk}$则可通过单轴抗拉实验和单轴抗压实验，用抗拉强度和抗压强度来表示。

2.3　S、$\sqrt{k}\,t_{nk}$测定

在单轴抗拉实验中，岩石只受一个拉应力作用，设其强度为R_l，那么

$$\delta=R_l;\quad u=\frac{R_l^2}{2E} \tag{11}$$

将(11)式代入(9)式中，得

$$S_n - R_l = \sqrt{k}\cdot t_{nk}\cdot\sqrt{\frac{R_l}{2E}} = -\sqrt{k}\cdot t_{nk}\cdot\frac{R_l^{2}}{\sqrt{2E}} \tag{12}$$

在单轴抗压实验中，岩石只受一个压应力作用，设其强度为 R_y，那么

$$\delta = 0;\qquad u = \frac{R_y^2}{2E} \tag{13}$$

将(13)式代入(9)式中，得

$$S_n = \sqrt{k}\cdot t_{nk}\cdot\sqrt{u} = \sqrt{k}\cdot t_{nk}\cdot\frac{R_y}{\sqrt{2E}} \tag{14}$$

(12)与(14)式联立，可求得

$$S_n = \frac{R_y R_l}{R_y + R_l};\quad \sqrt{k}\,t_{nk} = \frac{\sqrt{2E}R_l}{R_y + R_l} \tag{15}$$

将(15)式代入(9)式中并整理，可得断裂条件为

$$R_y - \left(\frac{R_y}{R_l} + 1\right)\delta = \sqrt{2Eu} = \left[\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 - 2\upsilon(\delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_3 + \delta_3\delta_1)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{16}$$

这样，只要测出岩石的单轴抗压强度 R_y，单轴抗拉强度 R_l，泊松比 υ 后，就可以对任意受力状态进行稳定性判断。

3 应用举例

混凝土支护巷道的力学指标如下：$R_y = 1.03\times10^7$Pa，$R_l = -7.94\times10^5$Pa，$\upsilon = 0.17$，测得拱脚主应力 $\delta_1 = 1.19\times10^7$Pa，$\delta_2 = 1.80\times10^6$Pa，$\delta_3 = -3.08\times10^5$Pa，试判断拱脚是否稳定。

解：①首先计算 $\sqrt{2Eu}$ 的值

$$\sqrt{2Eu} = \left[\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 - 2\upsilon(\delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_3 + \delta_3\delta_1)\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$= 1.13\times10^7\text{Pa}$$

②根据(16)式求极限拉应力 δ 值

$$\delta = \frac{R_y - \sqrt{2Eu}}{\frac{R_y}{R_l} + 1} = 8.72\times10^4\text{Pa}$$

③比较 δ 值与实际拉应力大小，判断其稳定性，当 $\delta_i < \delta$ 时为不稳定。本例中，δ_i 为 δ_3，$\delta_i = \delta_3 = -3.08\times10^5\text{Pa} < \delta = 8.72\times10^4$Pa，故该拱脚不稳定。

利用其它强度理论，如莫尔强度理论，格里菲斯理论等对该例进行稳定性判断，有相同的结果。

4 结束语

虽然该理论是从拉应力出发推导出断裂条件，事实上，统计强度理论对各种应力状态都是适用的。有拉应力时，δ_i 为数值最大拉应力；单轴压缩和双轴压缩状态，$\delta_i = 0$；三轴压缩时 $\delta_i = \delta_3$，用以上各 δ_i 与所求得的 δ 相比较，当 $\delta_i \leqslant \delta$ 时，岩石就发生断裂。

与其它强度理论相比较，统计强度理论同时考虑了应力和应变的综合结果，并且考虑了全部应力的作用，这是这一理论的优势。从实际算例看，这一理论比较符合脆性断裂的实际情况，但是，统计强度理论本身以及这一理论在实践中的应用，还需作更深入的研究工作。

参 考 文 献

1 徐小荷，余静. 岩石破碎学. 北京：煤炭工业出版社，1984

2 陈家鼎，刘婉如，汪仁官. 概率统计讲义. 北京：高等教育出版社，1982

3 梁治明，丘侃，陆耀兴. 材料力学. 北京：高等教育出版社，1984

Statistical Analysis of the Mechanism of the Brittle Break of Rocks

Chen Xiangjun **Gao Zhanfeng**

(Department of Communication Engineering) (Department of Electronic Engineering)

【Abstract】Based on the assumption of the normal distribution of the stress in the fracture surface of rocks, the strength condition of the brittle break of rocks is deduced and an example is given to explain the application of this theory.

【Keywords】rock; brittle break; strength theory; statistical analysis