又$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NA},\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{NC}-\overrightarrow{NB}$,

则$\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NA})+\frac{p-c}{a}(\overrightarrow{NC}-\overrightarrow{NB})$(3)

由(1)知$\overrightarrow{NA}=-\frac{a}{p}\overrightarrow{AD}$ (4)

(3)代入(4)式,有

$\overrightarrow{NA}=-\frac{a}{p}(\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NA})-\frac{p-c}{p}(\overrightarrow{NC}-\overrightarrow{NB})$ (5)

化简(5)式,即得

$(p-a)\overrightarrow{NA}+(p-b)\overrightarrow{NB}+(p-c)\overrightarrow{NC}=0$.

定理2 设G为$\triangle ABC$的Gergonne点,则有$\frac{\overrightarrow{GA}}{p-a}+\frac{\overrightarrow{GB}}{p-b}+\frac{\overrightarrow{GC}}{p-c}=0$.

证明:如图2,由Gergonne点的定义,知

$AR=p-a, BR=BP=p-b, CP=p-c$.

$\triangle ABP$被直线CGR所截,由梅内劳斯定理,有

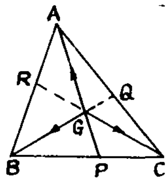


图2

$\frac{BC}{PC}\cdot\frac{PG}{GA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$,

$\frac{PG}{GA}=\frac{RB}{AR}\cdot\frac{PC}{BC}=\frac{p-b}{p-a}\cdot\frac{p-c}{a}$,

$\frac{AP}{AG}=\frac{PG}{GA}+1=\frac{(p-b)(p-c)+a(p-a)}{a(p-a)}$

所以$AG=\frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)+a(p-a)}\cdot AP$,而$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\frac{p-b}{a}\overrightarrow{BC}$,

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA},\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GB}$,

则$\overrightarrow{AP}=(\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA})+\frac{p-b}{a}(\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GB})$ (1)

又$\overrightarrow{GA}=-\frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)+a(p-a)}\overrightarrow{AP}$(2)

所以$[(p-b)(p-c)+a(p-a)]\overrightarrow{GA}=-a(p-a)\overrightarrow{AP}$ (3)

(1)代入(3)式,有

$[(p-b)(p-c)+a(p-a)]\overrightarrow{GA}=-a\cdot(p-a)[(\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA})+\frac{p-b}{a}(\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GB})]$.

化简上式,知

$(p-b)(p-c)\overrightarrow{GA}+(p-c)(p-a)\overrightarrow{GB}+(p-a)(p-b)\overrightarrow{GC}=0$.

上式两边同除以$(p-a)(p-b)(p-c)$,得$\frac{\overrightarrow{GA}}{p-a}+\frac{\overrightarrow{GB}}{p-b}+\frac{\overrightarrow{GC}}{p-c}=0$.

参考文献

[1]郭要红.界心、Nagel点及其他,中学数学教学,2001.5.

[2]赵加营.三角形“五心”向量形式的充要条件,数学通讯,2002,1.

涉及椭圆离心角的一个充要条件

江苏省江阴县华士高级中学 (224421) 王兆军

江苏省灌云县杨集中学 (222221) 尹广金

过椭圆$F:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上一点$M$作$x$轴的垂线,与以长轴为直径的圆交于点$A$($M$与$A$在$x$轴的同侧),以$Ox$为始边,$OA$为终边形成的正角$\varphi$称为$F$上$M$点的离心角.本文将给出与此有关的一个重要结论.

定理 F上任意四点P_1、P_2、P_3、P_4共圆的充要条件是这四点的离心角之和为$2k\pi(k\in N^*)$.

证明 当P_1、P_2、P_3、P_4是矩形或等腰梯形的四个顶点时,结论显然成立;当P_1、P_2、P_3、P_4不是矩形且不是等腰梯形的四个顶点时,令直线P_1P_2与直线P_3P_4交于点$P(x_0,y_0)$,直线P_1P_2与直线P_3P_4的倾斜角分别为

α_{12}、α_{34}，则直线 P_1P_2 的参数方程为

$$\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha_{12}, \\ y=y_0+t\sin\alpha_{12}. \end{cases}$$

代入 F 的方程，得

$$(b^2\cos^2\alpha_{12}+a^2\sin^2\alpha_{12})t^2+2(b^2x_0\cos\alpha_{12}+a^2y_0\sin\alpha_{12})t+(b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2)=0.$$

故 $PP_1\cdot PP_2=\dfrac{b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2}{b^2\cos^2\alpha_{12}+a^2\sin^2\alpha_{12}}$，

同理 $PP_3\cdot PP_4=\dfrac{b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2}{b^2\cos^2\alpha_{34}+a^2\sin^2\alpha_{34}}$.

令直线 P_1P_2 与直线 P_3P_4 的斜率分别为 k_{12}、k_{34}，$P_1(a\cos\theta_1, b\sin\theta_1)$，$P_2(a\cos\theta_2, b\sin\theta_2)$，$P_3(a\cos\theta_3, b\sin\theta_3)$，$P_4(a\cos\theta_4, b\sin\theta_4)$，则 $k_{12}=\dfrac{b\sin\theta_1-b\sin\theta_2}{a\cos\theta_1-a\cos\theta_2}=-\dfrac{b}{a}\cdot\cot\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}$，同理，有 $k_{34}=-\dfrac{b}{a}\cot\dfrac{\theta_3+\theta_4}{2}$，于是

$$k_{12}+k_{34}=-\frac{b}{a}\left(\cot\frac{\theta_1+\theta_2}{2}+\cot\frac{\theta_3+\theta_4}{2}\right)=-\frac{b}{a}\sin\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4}{2}\cdot\csc\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\csc\frac{\theta_3+\theta_4}{2}.$$

注意到 $b^2-a^2\neq0$，$\alpha_{12}+\alpha_{34}\in[0,2\pi)$，$k_{12}+k_{34}=\tan\alpha_{12}+\tan\alpha_{34}=\dfrac{\sin(\alpha_{12}+\alpha_{34})}{\cos\alpha_{12}\cos\alpha_{34}}$，即有

P_1、P_2、P_3、P_4 四点共圆

$\Leftrightarrow PP_1\cdot PP_2=PP_3\cdot PP_4$

$\Leftrightarrow b^2\cos^2\alpha_{12}+a^2\sin^2\alpha_{12}=b^2\cos^2\alpha_{34}+a^2\sin^2\alpha_{34}$

$\Leftrightarrow (b^2-a^2)\cos^2\alpha_{12}=(b^2-a^2)\cos^2\alpha_{34}$

$\Leftrightarrow \cos\alpha_{12}=\pm\cos\alpha_{34}$

$\Leftrightarrow \alpha_{12}+\alpha_{34}=0$ 或 π

$\Leftrightarrow k_{12}+k_{34}=0$

$\Leftrightarrow \sin\dfrac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4}{2}=0$

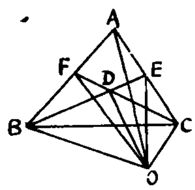
$\Leftrightarrow \theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=2k\pi(k\in N^*)$.

三角形"四心"的向量表达式

湖北京山一中 (431800) 梁克强 徐章韬

高中数学新教材中，利用定比分点的向量表达式，可以简捷地推导出三角形的重心、内心、垂心、外心的向量表达式.

如图，在 $\triangle ABC$ 中，F 是 AB 上的一点，E 是 AC 上的一点，且 $\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{m}{l}$，$\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{n}{l}$（通分总可以使两个异分母分数化为同分母分数），连结 CF，BE 交于点 D，求 D 点的坐标.



解析：在平面上任取一点 O，连结 OA、OB、OC、OD、OE、OF，由定比分点的向量表达式，得：

$$\overrightarrow{OF}=\frac{\overrightarrow{OA}+\frac{m}{l}\overrightarrow{OB}}{1+\frac{m}{l}}=\frac{l\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{l+m} \quad ①$$

$$\overrightarrow{OE}=\frac{\overrightarrow{OA}+\frac{n}{l}\overrightarrow{OC}}{1+\frac{n}{l}}=\frac{l\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OC}}{l+n} \quad ②$$

又 $$\overrightarrow{OD}=\frac{\overrightarrow{OF}+\lambda\overrightarrow{OC}}{1+\lambda}=\frac{\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OE}}{1+u} \quad ③$$

（其中，$\dfrac{FD}{DC}=\lambda$，$\dfrac{BD}{DE}=u$）

整理①、②、③式得：$\lambda=\dfrac{n}{m+l}$.

$\therefore \overrightarrow{OD}=\dfrac{l}{l+m+n}\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{l+m+n}\overrightarrow{OB}+\dfrac{n}{l+m+n}\overrightarrow{OC}$. ④

由④式出发，可得三角形"四心"的向量表达式：

（Ⅰ）若 BE、CF 是 $\triangle ABC$ 两边上的中线，交点 G 为重心，由④式可得重心 G 的向量表