

带参数的多结点样条

宋瑞霞¹⁾ 王小春²⁾

¹⁾(北方工业大学理学院 北京 100041)

²⁾(北京林业大学基础科学与技术学院 北京 100083)

摘要 多结点样条函数是在通常样条函数中引入更多的附加结点,其优越性表现在使插值过程无须求解任何方程组,而且有局部性.对多结点样条函数做进一步研究,构造了一类带参数的多结点样条基本函数.该类函数不仅保持了一般多结点样条函数的优点,而且由于参数的引进,使得基数型的插值公式可形成一族,可以根据实际问题的需要在函数(曲线)族中作出最优选择.文中研究的带参数的多结点样条函数,除了能用于表达平滑的数据及几何造型之外,尤其能适应波动较大、频率较高的数据拟合问题,有助于解决信号处理及非规则几何造型的一些问题.

关键词 插值;数据拟合;样条;B样条;多结点样条
中图分类号 TP391

Many-Knot Spline with A Parameter

Song Ruixia¹⁾ Wang Xiaochun²⁾

¹⁾(College of Sciences, North China University of Technology, Beijing 100041)

²⁾(College of Fundamental Sciences and Technology, Beijing Forestry University, Beijing 100083)

Abstract The many-knot spline functions introduce more knots than those of traditional spline functions. It has the advantages of no need to solve any system of equations for interpolation and being localized. Making a step further, a new class of many-knot spline function with a parameter is constructed. This class not only preserves the advantages of the original spline functions, but also gives rise to a class of cardinal type interpolation formulas owing to the additional parameter. Therefore, one can make the best choice to meet the needs of practical problems. The many-knot spline function with a parameter can be used to fit smooth data and fulfil geometric design, it is also especially suitable for fitting data with fairly big fluctuation of comparatively high frequency. This is very helpful for solving the problems of signal processing and making irregular geometric design.

Key words interpolation; data fitting; spline; B-spline; many-knot spline

1 引言

数据采集与处理是工程中普遍遇到的问题.由于数据来源及产生背景各不相同,因此出现了适应

各类不同情况的数据拟合方法,如多项式插值、样条函数插值、B样条磨光、滤波及最小二乘法等.研究这些方法的目的是给出便于应用的数学表达式.

数据采集的一类典型问题是对爆炸波数据的记录.爆炸波的波形分为三部分:上升沿、后继波和过

原稿收到日期:2002-10-08;修改稿收到日期:2003-01-09. 本课题得到国家重点基础研究发展规划项目(G1998030608)、国家自然科学基金(60133020,10071087)、北京市科技新星计划项目和北方工业大学科研基金资助. 宋瑞霞,女,1963年生,硕士,副教授,主要研究方向为微分几何、计算几何等. 王小春,女,1963年生,硕士,副教授,主要研究方向为逼近论、计算机图形学等.

渡段. 在示波器上显示的图形可以反映爆炸发生后波形的变化. 然而, 上升沿对应着很短的时间间隔 (如 10 ns), 为了提高数据的精度, 尽量保证源信息的完整, 人们不得不加大采样点的密度. 但是, 采样密度加大是有限的, 即使是有限的密集采样, 也必然极大地增加计算机的时空开销.

实验过程中遇到激烈震荡数据的情形, 在很难确保数据有更高精度的情况下, 往往要求对数据的波动有较好的定性表达^[1-2]. 基于这样的工程背景, 我们研究了用较少的采样数据表达波动曲线的一类方法. 本文研究的这类方法基于样条函数理论的多结点技术.

多结点样条函数最早是针对插值问题提出的. 1975 年, 齐东旭^[3-5]给出了多结点样条基本函数的构造及计算格式; 后继的文献^[6-14]给出进一步的理论分析和应用. 对插值问题而言, 多结点技术的最大优点是导致插值过程无须求解任何方程组, 而且插值格式具有局部性, 这是与通常样条函数插值 (三弯矩算法) 在计算上的根本区别. 被广泛应用的 B 样条曲线拟合方法虽然也不必求解方程组, 也具有局部性, 但在几何造型的应用中, 因其无法保证通过型值点而给工程计算带来不便, 因此多结点方法在工程应用上和理论研究上受到重视. 文献^[15-16]先后推广了文献^[3-5, 10]的结果, 并用于计算机辅助几何设计方面.

2 多结点基本样条函数

多结点基本样条函数是通过等距结点 B 样条基本函数的平移与迭加构造的^[17]. 记 I 为单位算子, μ 为平均算子, 对任意给定常数 ξ , 定义

$$\mu^\xi f(t) = \frac{1}{2} [f(t + \xi) + f(t - \xi)].$$

记

$$q_k(t) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j \mu^{h_j} \Omega_k(t),$$

其中,

$$\Omega_k(x) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j}$$

$$(x + \frac{k+1}{2} - j)_+^k (-1)^j, k = 0, 1, 2, \dots;$$

$(\cdot)_+ = \max\{\cdot, 0\}$; $h_0 = 0, h_1 < h_2 < \dots < h_{k-1} = \frac{k-1}{2}$; $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$ 为待定系数.

显然, 当 $k=1$ 时, 有 $q_1(t) = \Omega_1(t)$; 当 $k > 1$

时, 考虑到 $q_k(t)$ 的对称性, 令 $q_k(t)$ 满足

$$q_k(0) = 1, q_k(i) = 0, i = 1, 2, \dots, k-1 \quad (1)$$

于是得到关于 $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$ 的线性方程组. 由 $\{\mu^{h_j} \Omega_k(t)\}$ 的线性独立性质, 可知这样的方程组的解是惟一的, 所求得的 $q_k(t)$ 即为多结点基本样条函数^[17]. 特别地, 当 $k=2$ 时, 取 $h_0=0, h_1=\frac{1}{2}$, 可求得 2 次多结点基本样条函数为

$$q_2(x) = (2I - \mu^{1/2}) \Omega_2(x) \quad (2)$$

当 $k=3$ 时, 取 $h_0=0, h_1=\frac{1}{2}, h_2=1$ 可求得 3 次多结点基本样条函数为

$$q_3(x) = (\frac{10}{3}I - \frac{8}{3}\mu^{1/2} + \frac{1}{3}\mu) \Omega_3(x) \quad (3)$$

多结点基本样条函数的性质类似于 B 样条基本函数, 其主要区别在于: $q_k(t)$ 不是非负函数, 这将导致以它构成的插值格式不是线性正算子, 因此插值结果对数据而言不具有保凸性, 这也是追求显示解、局部性及基数型性质 (1) 等优越性付出的代价. 尽管如此, 正如 B 样条函数插值对数据没有保凸性但仍然实用一样, 多结点样条插值也仍然是实用的, 它已被成功地应用于飞机外形、进气道、机翼、海洋、地质的数据处理以及动画片的计算机制作等领域^[9, 11-12, 14].

多结点技巧的意义首先在于构造显示插值格式. 此外, 基函数的有界支集性质保证了插值曲线 (面) 的局部性, 有利于数据处理. 如果 y_0, y_1, \dots, y_N 为整数结点 $t_0 < t_1 < \dots < t_N$ 上给定的数据, 则多结点样条插值函数可写为

$$f(t) = \sum_j y_j q_k(t - j), 0 \leq t \leq N.$$

当给出确定的边界约束条件之后, 即可明确给出求和的上下限. 对于给定几何造型的型值点 P_0, P_1, \dots, P_N , 其参数形式的多结点样条曲线定义为

$$P(t) = \sum_j P_j q_k(t - j), 0 \leq t \leq N.$$

3 带参数的多结点基本样条函数

下面构造带参数的多结点基本样条函数, 令

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} q_k(t) + \mu g_k(t), & t \in [-k, k] \\ 0, & \text{else} \end{cases},$$

其中, $q_k(t)$ 是第 2 节中所述的多结点基本样条函数, μ 为参数. 为了让 $\varphi_k(t)$ 保持普通多结点样条函数的优越性 (基数型、插值不解方程组、局部性、规范性), 给约束条件

$$\varphi_k(0) = 1, \varphi_k(i) = 0, i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k \quad (4)$$

及

$$\int_{-k}^k \varphi_k(t) dt = 1, k = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

式(4)说明 $\varphi_k(t)$ 是基数型的, 式(5)说明 $\varphi_k(t)$ 具有规范性. 由式(1)及

$$\int_{-k}^k q_k(t) dt = 1, k = 1, 2, 3, \dots,$$

只须

$$g_k(i) = 0, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k \quad (6)$$

及

$$\int_{-k}^k g_k(t) dt = 0, k = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

直接构造满足式(6), (7)的函数有一定的困难, 现设 $g_k(t) = e_k(t) + \omega_k(t)$, $t \in [-k, k]$. 下面分别构造 $e_k(t)$ 及 $\omega_k(t)$.

将 $e_k(t)$ 表示成截断单项式 $\{(|t| - \frac{i}{2})_+^k, i = 0, 1, 2, \dots, 2k-1\}$ 的线性组合, 令

$$e_k(t) = |t|^k + \sum_{i=1}^{2k-1} \alpha_i (|t| - \frac{i}{2})_+^k \quad (8)$$

其中 α_i 待定. 由 $e_k(0) = e'_k(0) = e''_k(0) = \dots = e_k^{(k-1)}(0) = 0$, 为使 $\varphi_k(t)$ 满足 $k-1$ 阶连续及式(4), 令 $e_k(j) = 0, j = 1, 2, \dots, k$ 及 $e_k(k) = e'_k(k) = e''_k(k) = \dots = e_k^{(k-1)}(k) = 0$, 则由式(8)求出 α_i ,

$i = 1, 2, \dots, 2k-1$. 设 $\int_{-k}^k e_k(t) dt = \eta$, 现在来构造 $\omega_k(t)$. 为使 $\varphi_k(t)$ 满足式(4), (5), 只须让 $\omega_k(j) = 0, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k$ 且 $\int_{-k}^k \omega_k(t) dt = -\eta$, 由于 $\Omega_k[(k+1)(|t| - \frac{2i-1}{2})]$ 的跨度为 $[i-1, i]$ 且 $\int_{-k}^k \Omega_k[(k+1)(|t| - \frac{2i-1}{2})] dt = \frac{1}{k+1}$, 故令

$$\omega_k(t) = -\frac{(k+1)\eta}{k} \times \sum_{i=1}^k \Omega_k[(k+1)(|t| - \frac{2i-1}{2})] \quad (9)$$

则 $\omega_k(t)$ 满足要求, 于是式(6), (7)成立, 即式(4), (5)成立. 故

$$\varphi_k(t) = q_k(t) + \mu[e_k(t) + \omega_k(t)],$$

$$t \in [-k, k],$$

其中, $e_k(t), \omega_k(t)$ 分别如式(8), (9)所定义.

工程上常用 $k=2, k=3$ 的情形, 为此我们给出 $\varphi_2(t), \varphi_3(t)$ 的具体表达式.

对 $k=2$, 先求 $e_2(t)$, 令

$$e_2(t) = t^2 + \alpha_1(|t| - \frac{1}{2})_+^2 + \alpha_2(|t| - 1)_+^2 +$$

$$\alpha_3(|t| - \frac{3}{2})_+^2, t \in [-2, 2],$$

让它满足下面 3 个条件: $e_2(1) = 0, e_2(2) = 0, e'_2(2) = 0$, 则可解得 $\alpha_1 = -4, \alpha_2 = 6, \alpha_3 = -4$. 于是,

$$e_2(t) = t^2 - 4(|t| - \frac{1}{2})_+^2 + 6(|t| - 1)_+^2 - 4(|t| - \frac{3}{2})_+^2 \quad (10)$$

容易计算 $\int_{-2}^2 e(t) dt = 0$, 故 $\omega_2(t) = 0$. 于是 $\varphi_2(t) = q_2(t) + \mu e_2(t)$, 其中 $q_2(t)$ 和 $e_2(t)$ 如式(2), (10)所示.

对 $k=3$, 记

$$e_3(t) = |t|^3 + \alpha_1(|t| - \frac{1}{2})_+^3 + \alpha_2(|t| - 1)_+^3 + \alpha_3(|t| - \frac{3}{2})_+^3 + \alpha_4(|t| - 2)_+^3 + \alpha_5(|t| - \frac{5}{2})_+^3,$$

令 $e_3(1) = e_3(2) = e_3(3) = 0, e'_3(3) = e''_3(3) = 0$, 同理可求得 $\alpha_1 = -8, \alpha_2 = 23, \alpha_3 = -32, \alpha_4 = 23, \alpha_5 = -8$. 于是,

$$e_3(t) = |t|^3 - 8(|t| - \frac{1}{2})_+^3 + 23(|t| - 1)_+^3 - 23(|t| - \frac{3}{2})_+^3 + 23(|t| - 2)_+^3 - 8(|t| - \frac{5}{2})_+^3 \quad (11)$$

容易计算 $\int_{-3}^3 e_3(t) dt = -\frac{3}{2}$, 故

$$\omega_3(t) = 2 \sum_{i=1}^3 \Omega_3[4(|t| - \frac{2i-1}{2})] \quad (12)$$

于是 $\varphi_3(t) = q_3(t) + \mu[e_3(t) + \omega_3(t)]$, 其中 $q_3(t), e_3(t)$ 和 $\omega_3(t)$ 分别如式(3), (11), (12)所示.

注意: 此处只是给出了一种 $\varphi_k(t)$ 的构造法, 这里我们是从式(6)入手, 构造出满足条件的式(8), 再构造式(9). 事实上, 我们可以找到多种不同的构造法, 如可以从式(8)入手, 先构造出满足积分条件的函数, 再构造满足结点条件的函数.

4 带参数的多结点基本样条函数的图形

显然, 对于不同的参数, 对应的参数型多结点样条基函数是不同的. 下面给出常用的 2 次和 3 次参数型多结点基本样条函数的图例, 如图 1, 2 所示.

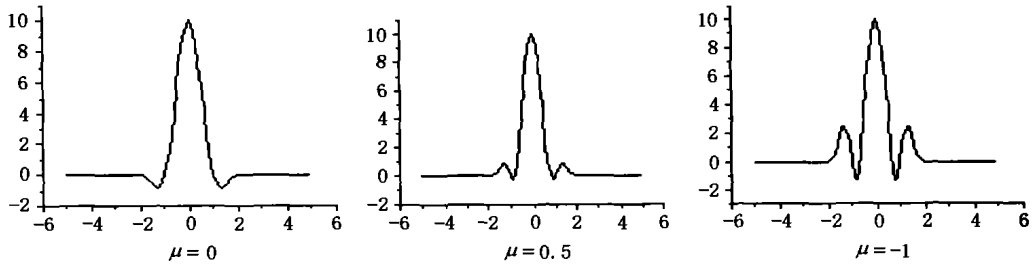


图1 对不同参数 μ 的 2 次多结点样条基本函数

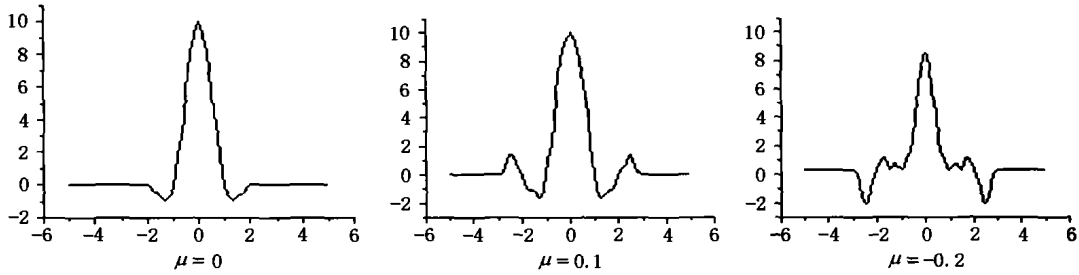


图2 对不同参数 μ 的 3 次多结点样条基本函数

从图中看出,带参数的多结点样条函数除了表达平滑的造型之外,更能适应波动较大、频率较高的曲线,而且参数 μ 直接影响基函数的波动.

5 带参数的多结点样条插值

从第 3 节带参数的多结点样条函数的构造过程可知,带参数的多结点样条函数插值也是基数型的,插值过程无需解方程组,而且由于基函数具有局部性,使得它保证了插值曲线及曲面的局部性,有利于数据处理. 假设在整数节点 i 处给定 $y_i, i = 0, 1, 2,$

\dots, n . 那么,带参数的多结点样条插值函数可写为

$$F(x) = \sum_i y_i \varphi_k(x - i), x \in [0, n].$$

若被逼近的曲线为 $y = G(x)$,则可以通过令下述积分达到最小而求出最佳平方逼近的参数值 μ .

$$\phi(\mu) = \int_{-k}^k [F(x) - G(x)]^2 dx = \int_{-k}^k \left\{ \sum_i y_i [q_k(x - i) + \mu(e_k(x - i) + \omega_k(x - i))] - G(x) \right\}^2 dx$$

令 $\phi'(\mu) = 0$ 可得

$$\mu = - \frac{\int_{-k}^k [\sum_i y_i q_k(x - i) - G(x)] \sum_i y_i [e_k(x - i) + \omega_k(x - i)] dx}{\int_{-k}^k \left\{ \sum_i y_i [e_k(x - i) + \omega_k(x - i)] \right\} dx},$$

此即为最佳参数.

对离散数据的最佳拟合,参数 μ 的最佳选择是类似的. 这时考虑 $\phi(\mu) = \sum_{j=1}^m [F(\xi_j) - \eta_j]^2 = \min$, 其中, $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \dots < \xi_m, (\xi_i, \eta_i), i = 1, 2, \dots, m$ 为给定的数据.

事实上,这样的理论上的最佳参数公式并不好用,而计算机上的调试或许是更方便的途径.

例 1. 对给定的离散数据点(如表 1 所示),用 2 次带参数的多结点样条函数,选择不同参数 μ 作插值曲线(如图 3 所示).

表 1 离散数据点

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	0.742 13	0.801 34	0.862 34	0.913 45	1	-0.917 25	0.794 85	-0.629 58
x	8	9	10	11	12	13	14	15
y	0.418 91	-0.161 16	-0.144 33	0.496 95	-0.894 69	2.175 62	2.175 62	1.640 93
x	16	17	18	19	20	21	22	23
y	1.563 21	1.527 39	1.510 88	1.503 27	1.499 77	1.498 15	1.497 41	1.497 06

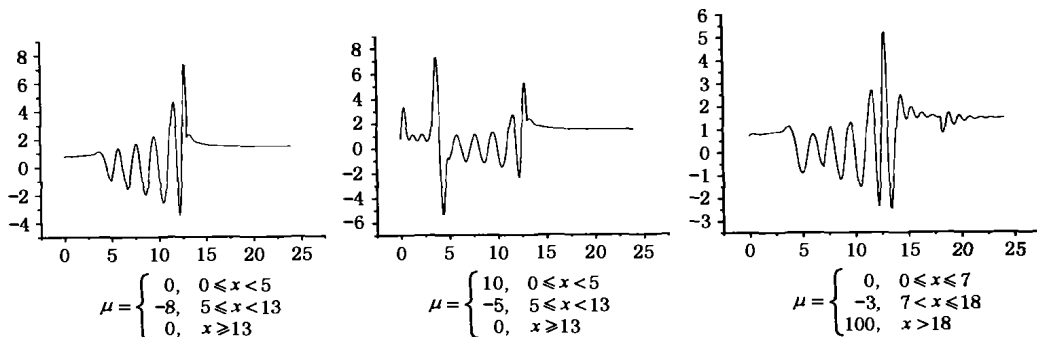


图3 参数 μ 对 2 次多结点样条插值曲线的影响

例 2. 图 4 所示为用 3 次带参数的多结点样条函数作插值曲线, 图中“·”表示给定的离散数据点.

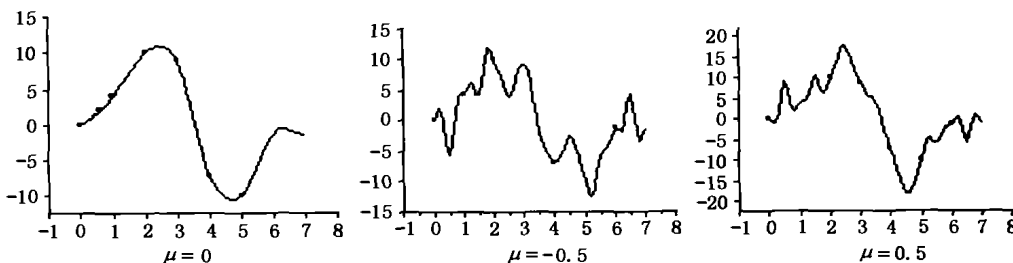


图 4 依赖于参数的 3 次多结点样条插值曲线

例 3. 对函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{0.2x}(\sin(3x) + \cos(3x)), & 0 \leq x \leq 9 \\ e^{-(x-9.5)} - 6.22247, & x > 9 \end{cases}$$

用 2 次参数型多结点样条函数进行拟合, 如图 5 所示, 其中虚线为 $f(x)$ 的图形. 可见图 5 c 中的参数 μ 选择比较合适.

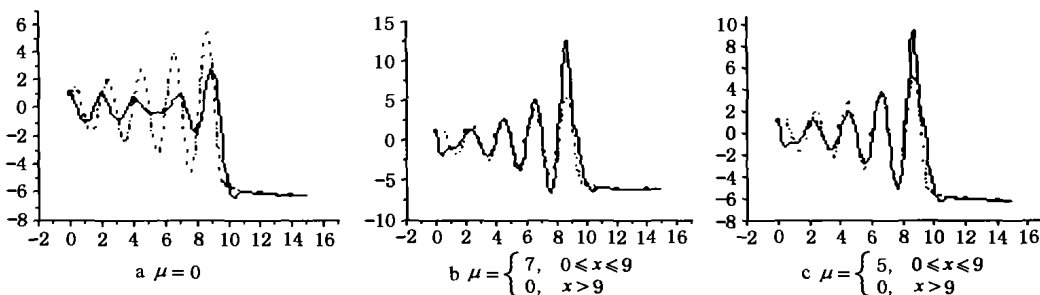


图 5 依赖于参数的 2 次多结点样条对 $f(x)$ 的拟合

6 结 论

普通的多结点样条对变化比较平缓的数据用起来非常方便, 但是对于具有较强波动的数据, 除非加大采样数目, 否则反映不出波动形态. 本文的改进在于用较少的数据量拟合出与原来大量数据的波动形态比较相近的曲线. 实验表明, 对强调定性的、又要在关键的点处严格一致的曲线拟合问题, 改进多结点样条函数是方便实用的.

带参数的多结点基本样条函数保持了多结点基本样条函数的基本性质(对称性、权性、局部性、规范

性等), 参数 μ 的引进使得 $\varphi_k(t)$ 的结点较普通多结点样条的结点进一步增多, 这给曲线造型带来更多的自由度. 显然, 当 $\mu = 0$ 时, 就是通常的多结点样条插值曲线; 当 $|\mu|$ 较小(大)时, 拟合的结果与通常的多结点样条插值的平滑拟合相比, 引入了较小(大)的波动, 可见, 参数起到控制曲线波动幅度的作用. 令 $\mu = \mu(t)$, 则通过函数 $\mu(t)$ 的选择, 可以控制出现波动的范围. 今后的研究将考虑控制函数的自适应选择问题.

致谢 本文得到齐东旭教授的悉心指导, 在此表示感谢!

参 考 文 献

- [1] Zhang Mingjun, Li Zhongqin, Qin Dahe, *et al.* Accumulation and temperature changes in Princess Elizabeth Land, Antarctica in the past 250 years [J]. *Progress in Natural Science*, 2001, 11(7): 525~528
- [2] Cheng B. On the modeling of sea ice thermodynamics and air-ice coupling in Bohai Sea and the Baltic Sea [D]. Finland: Finnish Institute of Marine Research-Contributions, 2002. 243~247
- [3] Qi Dongxu. On cardinal many-knot δ -spline interpolation (I) [J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Jilinensis*, 1975, (1): 70~81 (in Chinese)
(齐东旭. 关于多结点基函数型 δ -spline 插值(I) [J]. *吉林大学学报(自然科学版)*, 1975, (1): 70~81)
- [4] Qi Dongxu. On cardinal many-knot δ -spline interpolation (II) [J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Jilinensis*, 1976, (2): 36~44 (in Chinese)
(齐东旭. 关于多结点基函数型 δ -spline 插值(II) [J]. *吉林大学学报(自然科学版)*, 1976, (2): 36~44)
- [5] Qi Dongxu. On cardinal many-knot δ -spline interpolation (III) [J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Jilinensis*, 1979, (3): 1~8 (in Chinese)
(齐东旭. 关于多结点基函数型 δ -spline 插值(III) [J]. *吉林大学学报(自然科学版)*, 1979, (3): 1~8)
- [6] Qi Dongxu, Liang Zhenshan. On the polish method by many-knot spline function (I) [J]. *Numerical Mathematics a Journal of Chinese Universities*, 1979, 1(2): 196~200 (in Chinese)
(齐东旭, 梁振珊. 多结点样条磨光(I) [J]. *高等学校计算数学学报*, 1979, 1(2): 196~200)
- [7] Qi Dongxu, Liang Zhenshan. On the polish method by many-knot spline function (II) [J]. *Numerical Mathematics a Journal of Chinese Universities*, 1981, 3(1): 65~74 (in Chinese)
(齐东旭, 梁振珊. 多结点样条磨光(II) [J]. *高等学校计算数学学报*, 1981, 3(1): 65~74)
- [8] Qi Dongxu. Matrix representation and estimations of remainder term of many-knot spline interpolation curves and surfaces [J]. *Computational Mathematics*, 1982, 4(3): 244~252 (in Chinese)
(齐东旭. 多结点样条插值曲线与曲面的矩阵表达及余项估计 [J]. *计算数学*, 1982, 4(3): 244~252)
- [9] Qi Dongxu, Gao Mingyan. Many-knot spline interpolation and Boolean surfaces [A]. In: *Proceedings of International Symposium for, Computer Aided Drafting, Design and Manufacturing*, Beijing, 1987. 255~260
- [10] Qi Dongxu, Zhou Shuzi. Local explicit many-knot spline Hermite approximation schemes [J]. *Journal of Computational Mathematics*, 1983, 1(4): 317~321
- [11] Li Huashan, Ding Wei, Qi Dongxu. Many-knot spline interpolation and multi-scale refinement algorithm [J]. *Journal of Image and Graphics*, 1997, 2(10): 701~706 (in Chinese)
(李华山, 丁 玮, 齐东旭. 多结点样条插值及其多尺度细化算法 [J]. *中国图象图形学报*, 1997, 2(10): 701~706)
- [12] Yan Weiqi, Ding Wei, Qi Dongxu. Rational many-knot spline interpolating curves and surfaces [A]. In: *Proceedings of the 2nd International Conference on Computer-Aided Industrial Design and Conceptual Design [C]*. Beijing: International Academic Publishers, 1999. 504~508
- [13] Qi Dongxu, Li Huashan. Many-knot spline technique for approximation of data [J]. *Science in China(E)*, 1999, 42(4): 383~387
- [14] Yan Weiqi, Qi Dongxu. Many-knot spline interpolating curves and their applications in font design [J]. *Computer Aided Drafting, Design and Manufacturing*, 1999, 9(1): 1~8
- [15] Dahmen W, Goodman T N T, Micchelli A. Compactly supported fundamental functions for spline interpolation [J]. *Numerische Mathematik*, 1988, 52(4): 639~664
- [16] Riemenschneider S D, Shen Zuwei. General interpolation on the lattices: Compactly supported fundamental solutions [J]. *Numerische Mathematik*, 1995, 70(3): 331~351
- [17] Li Yuesheng, Qi Dongxu. *The Method of Spline Function [M]*. Beijing: Science Press, 1979 (in Chinese)
(李岳生, 齐东旭. 样条函数方法 [M]. 北京: 科学出版社, 1979)